УДК 514.146

КЛАССЫ КАМЕРОНА-ЛИБЛЕРА ПРЯМЫХ В $\mathrm{PG}(n, 5)$[1]

И. А. Маткин

На основании описания классов Камерона-Либлера прямых в $\mathrm{PG}(3,5)$ получено полное описание классов Камерона-Либлера прямых в $\mathrm{PG}(n,5)$, $n > 3$, из которого следует справедливость для случая $q = 5$ обобщённой гипотезы Камерона-Либлера о том, что в $\mathrm{PG}(n,q)$ при $n > 3$ существуют только тривиальные классы.

Ключевые слова: конечная проективная геометрия, классы Камерона-Либлера прямых.

Keywords: finite projective geometry, Cameron–Liebler line classes.

MSC: 51E20, 05B25

Введение

Пусть $\mathrm{PG}(n, q)$ обозначает конечную проективную геометрию размерности n, полученную проективизацией $(n+1)$-мерного векторного пространства над конечным полем $\mathbb{F}_q$, q — степень простого. *Классом Камерона-Либлера с параметром x прямых* в $\mathrm{PG}(3, q)$ называется такое множество прямых $\mathcal{L}$, что выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

(1) любой спред содержит точно x прямых из $\mathcal{L}$;

(2) любая прямая ℓ пересекает $x(q+1) + \chi_{\mathcal{L}}(\ell)(q^2-1)$ прямых из $\mathcal{L}$, где $\chi_{\mathcal{L}}$ — характеристическая функция множества $\mathcal{L}$;

(3) для любой инцидентной пары точки и плоскости (P, π) выполняется соотношение

$$|\mathsf{star}(P) \cap \mathcal{L}| + |\mathsf{line}(\pi) \cap \mathcal{L}| = x + (q+1)|\mathsf{pen}(P, \pi) \cap \mathcal{L}|,$$

где $\mathsf{star}(P)$ — пучок прямых через точку P, $\mathsf{line}(X)$ — множество всех прямых в подгеометрии X и для флага (P, X) положим $\mathsf{pen}(P, X) := \mathsf{star}(P) \cap \mathsf{line}(X)$.

В дальнейшем, для краткости, класс Камерона-Либлера прямых будем называть классом Камерона-Либлера.

Параметр x класса Камерона-Либлера определяет его размер: $|\mathcal{L}| = x(q^2+q+1)$. Напомним, что общее число прямых геометрии $\mathrm{PG}(3, q)$ равно $(q^2+1)(q^2+q+1)$.

В работе [4] было введено понятие специального класса прямых в связи с изучением подгрупп группы коллинеаций $\mathrm{P\Gamma L}(n+1, q)$ конечной проективной геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$, которые имеют одинаковое число орбит на множествах прямых и точек. В работе [12] специальные классы были названы классами Камерона-Либлера, и для них было доказано несколько эквивалентных свойств, каждое из которых является определяющим.

Зафиксируем обозначения $\mathcal{L}$ и $\overline{\mathcal{L}}$ для класса Камерона-Либлера и для его теоретико-множественного дополнения в множестве всех прямых геометрии. Из условия (1) легко следует, что дополнение $\overline{\mathcal{L}}$ к классу $\mathcal{L}$ с параметром x также является классом Камерона-Либлера с параметром $x(\overline{\mathcal{L}}) = (q^2+1) - x$. Поэтому можно ограничиться изучением классов Камерона-Либлера с параметрами, удовлетворяющими неравенству $x \leq (q^2+1)/2$.

В работе [4] были представлены следующие примеры классов Камерона-Либлера:

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-301-50004 «мол_нр».

(1) $x = 0$: $\mathcal{L} = \emptyset$;

(2) $x = 1$: $\mathcal{L} = \mathsf{star}(P)$ — пучок прямых, проходящих через некоторую точку P;

(3) $x = 1$: $\mathcal{L} = \mathsf{line}(\pi)$ — множество всех прямых некоторой гиперплоскости π;

(4) $x = 2$: $\mathcal{L} = \mathsf{star}(P) \cup \mathsf{line}(\pi)$, где $P \notin \pi$ — объединение всех прямых некоторой гиперплоскости π и пучка прямых, через некоторую неинцидентную ей точку P.

Эти классы и дополнительные к ним далее будем называть *тривиальными*. В работе [4] было доказано, что не существует других классов с такими параметрами и была выдвинута гипотеза, что для любого q в $\mathrm{PG}(3, q)$ существуют только тривиальные классы. Не сложно убедиться, что в $\mathrm{PG}(3, 2)$ любой класс Камерона-Либлера тривиален. В работе [6] было получено полное описание классов Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(3, 3)$ и, в частности, построен первый контрпример, имеющий параметр $x = 5$, к гипотезе. В работе [2] этот пример был обобщен до бесконечного семейства классов в $\mathrm{PG}(3, q)$ для нечетного q с параметром $x = (q^2 + 1)/2$. В последующих работах [3, 7–9, 11, 13] были построены другие отдельные примеры и бесконечные серии нетривиальных классов Камерона-Либлера.

В работе [5] было дано определение классу Камерона-Либлера с параметром x в $\mathrm{PG}(n, q)$, $n \geq 3$, как множеству прямых $\mathcal{L}$ таких, что выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

(1) для любого флага (P, X), где X — i-мерная подгеометрия геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$:

$$|\mathsf{star}(P) \cap \mathcal{L}| + \frac{\theta_{n-2}}{\theta_{i-1}\theta_{i-2}}|\mathsf{line}(X) \cap \mathcal{L}| = x + \frac{\theta_{n-2}}{\theta_{i-2}}|\mathsf{pen}(P, X) \cap \mathcal{L}|,$$

где $\theta_d := q^d + \cdots + q + 1$;

(2) любая прямая ℓ пересекает $x(q + 1) + \chi_{\mathcal{L}}(\ell)(q^{n-1} + \cdots + q^2 - 1)$ прямых из $\mathcal{L}$;

(3) (при нечетном n) любой спред содержит точно x прямых из $\mathcal{L}$.

Такой класс состоит из $x\theta_{n-1}$ прямых, при этом общее число прямых геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$ равно $\theta_n\theta_{n-1}/\theta_1$. Дополнительный класс имеет параметр $x(\overline{\mathcal{L}}) = \theta_n/\theta_1 - x$. Поэтому можно ограничиться изучением классов Камерона-Либлера с параметрами, удовлетворяющими неравенству $x \leq \theta_n/(2\theta_1)$. Заметим, что в случае четного n параметр x не обязан быть целым числом, но для для любого n значение $x(q + 1)$ является целым числом.

Для любого значения n актуальны тривиальные классы Камерона-Либлера, описанные выше. В работе [5] Друдж обобщил гипотезу Камерона-Либлера следующим образом: в геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$ при $n > 3$ существуют только тривиальные классы Камерона-Либлера. На данный момент контрпримеры к обобщенной гипотезе не известны.

На основании ранее полученного описания классов в $\mathrm{PG}(3, 3)$ (см. [6]) в работе [5] было показано, что все классы Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, 3)$, $n > 3$, тривиальны.

В работе [10] было предложено понятие шаблона, которое позволило изучать локальное строение классов Камерона-Либлера и получить некоторые новые необходимые условия их существования (см. [9, 10]). В частности, в работе [10] было получено полное описание классов Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(3, 4)$ и на его основе, с привлечением идеи из работы [5], было показано, что классы Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, 4)$ при $n > 3$ тривиальны. Подробнее шаблоны и подход из работы [5] обсуждаются в разделе 1 и в разделах 2, 3 соответственно.

В $\mathrm{PG}(3, 5)$, с точностью до дополнения, проективной эквивалентности и полярности, известны следующие нетривиальные классы Камерона-Либлера:

- $\mathcal{G}$ с параметром $x = 10$, построенный в работе [9],

- $\mathcal{R}$ с параметром $x = 12$, построенный в работе [13] (и обобщенный до бесконечного семейства классов Камерона-Либлера в работах [3, 7]),

- $\mathcal{R}^+$ с параметром $x=13$, полученный добавлением всех прямых плоскости, изолированной от класса $\mathcal{R}$,
- $\mathcal{D}$ с параметром $x=13$, построенный в работе [2],
- $\mathcal{P}$ с параметром $x=13$, построенный в работе [8].

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Если любой нетривиальный класс Камерона-Либлера в* $\mathrm{PG}(3,5)$*, с точностью до дополнения, проективной эквивалентности и полярности, является одним из классов* $\mathcal{G}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$, *то все классы Камерона-Либлера в* $\mathrm{PG}(n,5)$, $n>3$, *тривиальны.*

В совместной работе (готовится к публикации) с А.Л. Гаврилюком показано, что все нетривиальные классы Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(3,5)$ исчерпываются списком, приведенным выше. С учётом этого результата верно

Следствие 1. *В* $\mathrm{PG}(n,5)$, $n>3$, *все классы Камерона-Либлера тривиальны.*

1. Шаблоны прямых

Пусть $\mathcal{L}$ — класс Камерона-Либлера с парамером x в $\mathrm{PG}(3,q)$. Рассмотрим произвольную прямую ℓ геометрии $\mathrm{PG}(3,q)$. Эта прямая содержит $q+1$ точку $P_1,P_2,\dots P_{q+1}$ и лежит в $q+1$ плоскости $\pi_1,\pi_2,\dots\pi_{q+1}$. Шаблоном прямой ℓ называется квадратная матрица $T(\ell)=(t_{ij})$ размером $q+1$, где
$$t_{ij}=|(\mathsf{pen}(P_i,\pi_j)\setminus\{\ell\})\cap\mathcal{L}|.$$

При таком определении столбцы шаблона соответствуют плоскостям, в которых лежит прямая, а строки — точкам прямой. Если шаблоны транспонировать (или, что то же самое, считать строки соответствующими плоскостям, а столбцы точкам), то получим шаблоны двойственного класса, полученного под действием полярности геометрии $\mathrm{PG}(3,q)$. Также заметим, что шаблоны определены с точностью до перестановки строк и столбцов. Сумму элементов столбца будем называть *весом столбца*. Количество прямых класса в плоскости будем называть *весом плоскости*. Вес плоскости равен весу соответствующего столбца плюс $\chi_{\mathcal{L}}(\ell)$. Аналогично определяются *вес строки* и *вес точки*.

Лемма 1. ([10, *Lemma* 4]) *Для любой прямой* ℓ *её шаблон* $T(\ell)=(t_{ij})$ *удовлетворяет следующим свойствам:*

(1)
$$\forall i\in\{1,\dots,q+1\}:\quad \sum_{j=1}^{q+1}t_{ij}=|(\mathit{star}(P_i)\setminus\{\ell\})\cap\mathcal{L}|,$$
$$\forall j\in\{1,\dots,q+1\}:\quad \sum_{i=1}^{q+1}t_{ij}=|(\mathit{line}(\pi_j)\setminus\{\ell\})\cap\mathcal{L}|.$$

(2)
$$\sum_{i,j=1}^{q+1}t_{ij}=x(q+1)+\chi_{\mathcal{L}}(\ell)(q^2-1).$$

(3) $\forall k, l \in \{1, \dots, q+1\}$:

$$\sum_{i=1}^{q+1} t_{il} + \sum_{j=1}^{q+1} t_{kj} = x + (q+1)(t_{kl} + \chi_{\mathcal{L}}(\ell)) - 2\chi_{\mathcal{L}}(\ell).$$

(4) $\forall k, l, r, s \in \{1, \dots, q+1\}: \quad t_{kl} + t_{rs} = t_{ks} + t_{rl}$.

(5)

$$\sum_{i,j=1}^{q+1} t_{ij}^2 = (x - \chi_{\mathcal{L}}(\ell))^2 + q(x - \chi_{\mathcal{L}}(\ell)) + \chi_{\mathcal{L}}(\ell) q^2 (q+1).$$

Из свойств (3) и (4) шаблонов видно, что шаблон однозначно восстанавливается из любой строки и любого столбца.

В работе [9] анализ свойства (5) позволил вывести сравнение, которому должен удовлетворять параметр класса.

Теорема 2. ([9, *Theorem* 1.1]) *Пусть* $\mathcal{L}$ *— класс Камерона-Либлера с параметром* x *в* $\mathrm{PG}(3,q)$. *Тогда для любой плоскости верно следующее сравнение*

$$\binom{x}{2} + n(n-x) \equiv 0 \mod q+1,$$

где n *— вес плоскости.*

Лемма 1 и Теорема 2 позволяют перебором найти все допустимые значения параметра класса в $\mathrm{PG}(3,q)$ и для каждого параметра найти допустимые шаблоны. Геометрический анализ допустимых шаблонов позволил получить полное описание классов в $\mathrm{PG}(3,4)$ ([10]) и в $\mathrm{PG}(3,5)$.

2. Редукция из $\mathrm{PG}(n,q)$ в $\mathrm{PG}(3,q)$

В этом разделе мы напомним идею из работы [5], позволяющую свести задачу описания классов Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n,q)$ к изучению классов Камерона-Либлера, возникающих в 3-мерных подгеометриях геометрии $\mathrm{PG}(n,q)$. Следующая лемма является ключевой для такой редукции.

Лемма 2. ([5, *Theorem* 6.1]) *Для любого класса Камерона-Либлера* $\mathcal{L}$ *в* $\mathrm{PG}(n,q)$ *и любой* 3*-мерной подгеометрии* $X \subset \mathrm{PG}(n,q)$ *множество прямых* $\mathsf{line}(X) \cap \mathcal{L}$ *является классом Камерона-Либлера в* $\mathrm{PG}(3,q)$.

Таким образом, зная полное описание классов Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(3,q)$, можно получить перечень возможных индуцированных классов Камерона-Либлера в 3-мерных подгеометриях геометрии $\mathrm{PG}(n,q)$. Анализ возможности существования этих индуцированных классов в различных подгеометриях может позволить получить строение классов в исходной геометрии $\mathrm{PG}(n,q)$, и этот обратный шаг составляет основную сложность метода.

Очевидно, если во всякой 3-мерной подгеометрии индуцируется класс, состоящий из всех прямых этой подгеометрии, то классом в исходной геометрии является класс, состоящий из всех прямых этой геометрии. Аналогичное наблюдение справедливо для класса $\mathcal{L} = \emptyset$. Это тривиальные случаи и в дальнейшем будем предполагать, что среди индуцируемых классов обязательно найдётся класс, отличный от $\emptyset$ и $\mathsf{line}(X)$.

Следующие две леммы позволяют однозначно восстанавливать класс Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, q)$ по некоторым тривиальным классам Камерона-Либлера, индуцируемым в 3-мерных подгеометриях.

Лемма 3. ([5, *Lemma* 6.1]) *Пусть $\mathcal{L}$ — класс Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, q)$ такой, что для некоторой 3-мерной подгеометрии X и для некоторой точки $P \in X$ верно $\mathsf{line}(X) \cap \mathcal{L} = \mathsf{pen}(P, X)$. Тогда $\mathcal{L} = \mathsf{star}(P)$.*

Лемма 4. ([5, *Lemma* 6.3]) *Пусть $\mathcal{L}$ — класс Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, q)$ такой, что для некоторой 3-мерной подгеометрии X индуцируемый в ней класс имеет параметр $x = 2$ в $\mathrm{PG}(3, q)$. Тогда $\mathcal{L}$ является классом с параметром $x = 2$.*

Рассуждения из ([5, Theorem 6.3]) можно переформулировать следующим образом.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, q)$ такой, что для любой 3-мерной подгеометрии X индуцируемый в ней класс является одним из следующих: {все прямые подгеометрии}, {все прямые некоторой плоскости подгеометрии} или дополнительные к этим классам. Тогда $\mathcal{L}$ с точностью до дополнения является множеством всех прямых некоторой гиперплоскости.*

Из Лемм 2 - 5 можно сформулировать следующее

Следствие 2. *Если класс Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, q)$ при $n > 3$ индуцирует в 3-мерных подгеометриях только тривиальные классы Камерона-Либлера, то этот класс является тривиальным.*

Таким образом, для доказательства обобщённой гипотезы Камерона-Либлера для заданного q достаточно показать, что класс Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, q)$ может индуцировать только тривиальные классы Камерона-Либлера в 3-мерных подгеометриях геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$. По сравнению с классами Камерона-Либлера в геометриях $\mathrm{PG}(n, 3)$, $\mathrm{PG}(n, 4)$, которые были изучены в работах [5], [10], случай $\mathrm{PG}(n, 5)$ представляет некоторую сложность, поскольку, с точностью до дополнения, проективной эквивалентности и полярности, в $\mathrm{PG}(3, 5)$ существует пять нетривиальных классов Камерона-Либлера (см. раздел 4), в то время как каждая из геометрий $\mathrm{PG}(3, 3)$, $\mathrm{PG}(3, 4)$ допускает только один нетривиальный класс Камерона-Либлера.

3. Анализ индуцированных классов Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(3, q)$

В данном разделе представлены вспомогательные результаты, которые будут использованы в следующем разделе для доказательства того факта, что класс Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, 5)$ может индуцировать только тривиальные классы Камерона-Либлера в 3-мерных подгеометриях геометрии $\mathrm{PG}(n, 5)$. Эти результаты, основанные на элементарных свойствах шаблонов, существенно упрощают и обобщают (для произвольного q) идею доказательства Друджа (см. [5]) о несуществовании нетривиальных классов Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, 3)$, $n > 3$.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, q)$. Для различных 3-мерных подгеометрий X, Y геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$ пусть $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ — классы Камерона-Либлера, индуцируемые в этих подгеометриях классом $\mathcal{L}$. Если в шаблонах прямых подгеометрии X, принадлежащих (соответственно, не принадлежащих) классу $\mathcal{L}_1$, найдётся столбец, который* *не встречается в шаблонах прямых подгеометрий Y, принадлежащих (соответственно, не принадлежащих) классу $\mathcal{L}_2$, то X и Y не могут пересекаться по плоскости, соответствующей этому столбцу.*

Доказательство. Столбец шаблона некоторой прямой ℓ определяет количество прямых класса, проходящих через каждую точку этой прямой в некоторой плоскости π, соответствующей этому столбцу. Очевидно, что для любого класса Камерона-Либлера в любой 3-мерной подгеометрии, содержащей эту плоскость, шаблон прямой ℓ будет содержать с точностью до перестановки тот же самый столбец, соответствующий плоскости π. $\square$

Для любого флага (P, π) в $\mathrm{PG}(n, q)$ множество $\mathsf{star}(P)$ разбивается на $\mathsf{pen}(P, \pi)$ и $\{\mathsf{pen}(P, X_i) \setminus \mathsf{line}(\pi)\}$, где $\{X_i\}$ – множество всех 3-мерных подгеометрий, содержащих π, т. е.

$$\mathsf{star}(P) = \mathsf{pen}(P, \pi) \cup \bigcup_{i=1}^{N} (\mathsf{pen}(P, X_i) \setminus \mathsf{line}(\pi)) \tag{3.1}$$

где $N := |\{X_i\}| = \frac{q^{n-2}-1}{q-1}$.

Как следствие, мы получаем, что при условии $\forall X_i: \ |(\mathsf{pen}(P, X_i) \setminus \mathsf{line}(\pi)) \cap \mathcal{L}| = p$ выполняется равенство $|\mathsf{star}(P) \cap \mathcal{L}| = |\mathsf{pen}(P, \pi) \cap \mathcal{L}| + N \cdot p$.

Лемма 7. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, q)$. Если для некоторого флага (P, π) во всех 3-мерных подгеометриях, содержащих π, $\mathcal{L}$ индуцирует классы Камерона-Либлера с одинаковым параметром, то вес точки P в этих классах будет одинаковым, а значит $|\mathsf{star}(P) \cap \mathcal{L}| = |\mathsf{pen}(P, \pi) \cap \mathcal{L}| + N \cdot p$, где p — вес точки в индуцированных классах за вычетом $|\mathsf{pen}(P, \pi) \cap \mathcal{L}|$.*

Доказательство. Пусть X_1, X_2 — 3-мерные подгеометрии геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$, содержащие некоторый флаг (P, π). Пусть $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ — классы Камерона-Либлера в этих подгеометриях, индуцированные классом $\mathcal{L}$. Рассмотрим некоторую прямую ℓ, проходящую через P и лежащую в π. Пусть вес плоскости π равен w. Необходимо показать, что вес точки P одинаков в классах $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$. Хотя классы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ имеют одинаковый параметр, прямая ℓ в них может иметь различные шаблоны. Флагу (P, π) в шаблонах прямой ℓ будет отвечать элемент, равный $|\mathsf{pen}(P, \pi) \cap \mathcal{L}| - \chi_{\mathcal{L}}(\ell)$, лежащий в пересечении столбца веса $w - \chi_{\mathcal{L}}(\ell)$ и некоторой строки. По свойству (3) из Леммы 1 вес столбца и значение элемента (при фиксированном параметре класса) однозначно определяют вес строки, т. е. $|\mathsf{pen}(P, X_1) \cap \mathcal{L}_1| = |\mathsf{pen}(P, X_2) \cap \mathcal{L}_2|$. $\square$

Лемма 8. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n, q)$. Пусть Z — 3-мерная подгеометрия геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$, содержащая два флага (P, π_1), (P, π_2) такие, что плоскости π_1 и π_2 имеют разный вес в классе $\mathcal{L}$ и пересекаются по некоторой прямой ℓ, содержащей точку P. Пусть $\{X_i\}$ – множество 3-мерных подгеометрий геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$, содержащих π_1, $\{Y_i\}$ — множество 3-мерных подгеометрий геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$, содержащих π_2, так что $Z = \{X_i\} \cap \{Y_i\}$. Если классы Камерона-Либлера, индуцируемые во всех подгеометриях X_i и Y_i, имеют одинаковый параметр, то $n = 3$.*

Доказательство. Применим Лемму 7 для этих двух флагов:

$|\mathsf{star}(P) \cap \mathcal{L}| = |\mathsf{pen}(P, \pi_1) \cap \mathcal{L}| + N \cdot p_1$, где p_1 – вес точки P в классе, индуцированном в X_i, за вычетом $|\mathsf{pen}(P, \pi_1) \cap \mathcal{L}|$.

$|\mathsf{star}(P) \cap \mathcal{L}| = |\mathsf{pen}(P, \pi_2) \cap \mathcal{L}| + N \cdot p_2$, где p_2 – вес точки P в классе, индуцированном в Y_i, за вычетом $|\mathsf{pen}(P, \pi_2) \cap \mathcal{L}|$.

В шаблоне прямой ℓ класса, индуцированного в подгеометрии Z, флагам (P,π_1) и (P,π_2) соответствуют два элемента, лежащие в пересечении строки, соответствующей точке P, и двух столбцов, соответствующих плоскостям π_1 и π_2. Поскольку веса плоскостей разные, то эти элементы (определяемые весом столбца и весом строки) разные. Отсюда следует, что $p_1 \neq p_2$. Значит, из двух равенств получается одно нетривиальное линейное уравнение относительно одной неизвестной N. Это уравнение должно иметь решение $N = 1$ ($n = 3$), которое будет единственным решением. □

Лемма 9. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс Камерона-Либлера в* $\mathrm{PG}(3,q)$ *с параметром x. Если среди шаблонов этого класса существует шаблон T, который содержит два столбца разного веса, ни один из которых не встречается в шаблонах никакого другого класса в* $\mathrm{PG}(3,q)$ *с параметром, отличным от x, то данный класс не может индуцироваться в 3-мерных подгеометриях классом Камерона-Либлера в* $\mathrm{PG}(n,q)$ *при $n > 3$.*

Доказательство. Предположим, что в некоторой 3-мерной подгеометрии индуцируется класс, проективно эквивалентный $\mathcal{L}$. Тогда некоторая прямая ℓ подгеометрии имеет шаблон T. Пусть два столбца этого шаблона из условия леммы соответствуют двум плоскостям π_1 и π_2, которые содержат эту прямую. По Лемме 6 во всех 3-мерных подгеометриях, содержащих π_1 или π_2, индуцируются классы с параметром x. Тогда по Лемме 8 (в качестве точки P можем выбрать любую точку прямой ℓ) $n = 3$. □

В дальнейшем пару столбцов шаблона, удовлетворяющих условиям Леммы 9, будем называть парой *уникальных* столбцов.

4. Классы Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(n,5)$

Как отмечалось выше, с помощью анализа шаблонов было получено полное описание классов Камерона-Либлера в $\mathrm{PG}(3,5)$. В частности, для каждого класса известна следующая информация:

(1) шаблоны прямых из $\mathcal{L}$ и прямых из $\overline{\mathcal{L}}$;

(2) для каждого шаблона число прямых, имеющих этот шаблон;

(3) веса плоскостей и количество плоскостей каждого веса;

(4) веса точек и количество точек каждого веса.

Замечание. Далее нам понадобятся шаблоны всех классов в $\mathrm{PG}(3,5)$. Заметим, что для каждого класса существует двойственный (шаблоны, которого получены транспонированием шаблонов исходного класса), дополнительный и двойственный к дополнительному (который является дополнительным к двойственному). Так как шаблоны двойственного класса могут быть легко получены из шаблонов исходного, то в разделе 5 представлены шаблоны только одного из пары двойственных классов. Шаблоны дополнительного класса также могут быть получены из шаблонов исходного класса, но эта операция менее наглядная, чем для двойственного класса, поэтому для удобства в разделе 5 представлены шаблоны и для дополнительного класса (кроме тех случаев, когда дополнительный совпадает с двойственным).

Шаблоны для класса с параметром $x = 0$ и для дополнительного к нему ($x = 26$) не приведены, так как их шаблоны очевидны. Эти классы самодвойственны.

Для класса с параметром $x = 1$, состоящего из всех прямых гиперплоскости, шаблоны приведены в табл. 1. Для дополнительного к нему класса с параметром $x = 25$ шаблоны приведены в табл. 2. Класс, состоящий из всех прямых через точку, и дополнительный к нему являются двойственными двум классам, указанным выше.

Для класса с параметром $x = 2$ шаблоны приведены в табл. 3. Для дополнительного к нему класса с параметром $x = 24$ шаблоны приведены в табл. 4. Эти классы самодвойственные.

Далее приведено описание нетривиальных классов.

(1) Класс с параметром $x = 10$, построенный в работе [9]. Шаблоны для класса приведены в табл. 5. Шаблоны для дополнительного к нему класса (с параметром $x = 16$) приведены в табл. 6.

(2) Класс с параметром $x = 12$, построенный в работе [13]. Шаблоны для класса приведены в табл. 7. Шаблоны для дополнительного к нему класса (с параметром $x = 14$) приведены в табл. 8. Эти два класса самодвойственны.

(3) Класс с параметром $x = 13$, построенный в работах [3, 7]. Шаблоны для класса приведены в табл. 9. Дополнительный класс совпадает с двойственным.

(4) Класс с параметром $x = 13$, построенный в работе [8]. Шаблоны для двойственного класса приведены в табл. 10. Дополнительный класс совпадает с двойственным.

(5) Класс с параметром $x = 13$, построенный в работе [2]. Шаблоны для двойственного класса приведены в табл. 11. Дополнительный класс совпадает с двойственным.

З а м е ч а н и е. Для каждого нетривиального класса следует доказывать невозможность его существования среди классов, индуцированных в 3-мерных подгеометриях геометрии $\mathrm{PG}(n, 5)$, $n > 3$. Однако пара взаимнодополнительных классов может существовать/не существовать только совместно, поскольку операция теоретико-множественного дополнения сохраняет свойство "быть классом Камерона-Либлера". Следовательно для каждого класса мы можем доказывать невозможность индуцирования только одного класса из пар {исходный класс, дополнительный класс}, {двойственный класс, двойственный к дополнительному}. Если дополнительный класс совпадает с двойственным (двойственный к дополнительному совпадает с исходным), то доказывать нужно только для одного класса из пары {исходный класс, дополнительный класс}.

Лемма 10. *Класс Камерона-Либлера в* $\mathrm{PG}(n, 5)$ *при* $n > 3$ *в 3-мерных подгеометриях геометрии* $\mathrm{PG}(n, 5)$ *не может индуцировать следующие нетривиальные классы:*

1. *класс* (4) *и двойственный к нему;*
2. *класс* (5) *и двойственный к нему;*
3. *класс* (1) *и двойственный к нему;*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По Лемме 9 для доказательства достаточно найти шаблоны указанных классов, содержащих уникальные столбцы.

1. Поскольку двойственный класс в данном случае совпадает с дополнительным, то достаточно доказать невозможность индуцирования либо исходного класса либо двойственного. Во втором шаблоне дополнительного (двойственного) класса, полученного транспонированием второго шаблона класса из табл. 10, есть уникальные столбцы для плоскостей веса 9 и 27 (вес 27 уникален для этого класса, вес 9 встречается в классе с параметром $x = 10$, но с другими столбцами).

2. Поскольку двойственный класс в данном случае совпадает с дополнительным, то достаточно доказать невозможность индуцирования либо исходного класса либо двойственного. В первом шаблоне дополнительного (двойственного) класса, полученного транспонированием первого шаблона класса из табл. 11, есть уникальные столбцы для плоскостей веса 3 и 21 (плоскости таких весов встречаются в классе с параметром $x = 10$, но с другими столбцами).

3. Во втором шаблоне прямых не класса (табл. 5) есть уникальные столбцы для плоскостей веса 3 и 9 (плоскости этих весов встречаются в шаблонах исключенных выше двойственных классов к классам (4), (5), но с другими столбцами).

В первом шаблоне двойственного класса, полученного транспонированием первого шаблона класса из табл. 5, есть уникальные столбцы для плоскостей веса 7 и 13 (плоскости этих весов встречаются в шаблонах класса (3) и дополнительного к классу (2), но с другими столбцами шаблона). □

Лемма 11. *Класс Камерона-Либлера в* $\mathrm{PG}(n,5)$ *при* $n > 3$ *в 3-мерных подгеометриях геометрии* $\mathrm{PG}(n,5)$ *не может индуцировать следующие нетривиальные классы:*
- класс (2) и двойственный к нему;
- класс (3) и двойственный к нему.

Доказательство. Поскольку класс (2) является самодвойственным, то достаточно доказать невозможность индуцирования только класса (2). Поскольку двойственный класс к классу (3) совпадает с дополнительным, то достаточно доказать невозможность индуцирования двойственного (дополнительного) к классу (3). Обозначим класс (2) через $\mathcal{L}_1$, двойственный (дополнительный) класс к классу (3) через $\mathcal{L}_2$.

Рассмотрим третий шаблон прямой не класса для $\mathcal{L}_1$ (табл. 7):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

и четвертый шаблон прямой не класса для $\mathcal{L}_2$ (получен транспонированием четвертого шаблона прямой не класса в табл. 9):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Первый и шестой столбцы этих шаблонов встречаются в шаблонах прямых не класса только для этих классов (заметим, что эти столбцы встречаются в шаблоне для класса (3), но для прямых класса, т. е. для плоскости другого веса).

Предположим, что в некоторой 3-мерной подгеометрии геометрии $\mathrm{PG}(n,5)$ индуцируется класс Камерона-Либлера, проективно эквивалентный $\mathcal{L}_1$. Тогда в этой подгеометрии существуют прямая ℓ, имеющая указанный шаблон, некоторая плоскость π_1, соответствующая первому столбцу шаблона, и некоторая плоскость π_2, соотвествующая шестому столбцу шаблона. По Лемме 6 в 3-мерных подгеометриях геометрии $\mathrm{PG}(n,5)$, содержащих эти плоскости, могут индуцироваться только классы, проективно эквивалентные $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Пусть P — точка прямой ℓ, соответствующая первой строке шаблона. Применим выражение (3.1) для подсчета $|\mathsf{star}(P)\cap\mathcal{L}|$ относительно флагов (P,π_1) и (P,π_2). Введем обозначения:

n_1 — число 3-мерных подгеометрий, содержащих π_1, в которых индуцируется класс $\mathcal{L}_1$.

m_1 — число 3-мерных подгеометрий, содержащих π_1, в которых индуцируется класс $\mathcal{L}_2$.

n_2 — число 3-мерных подгеометрий, содержащих π_2, в которых индуцируется класс $\mathcal{L}_1$.

m_2 — число 3-мерных подгеометрий, содержащих π_2, в которых индуцируется класс $\mathcal{L}_2$.

X_1 — некоторая 3-мерная подгеометрия, которая содержит π_1 и в которой индуцируется класс, проективно эквивалентный $\mathcal{L}_1$.

Y_1 — некоторая 3-мерная подгеометрия, которая содержит π_1 и в которой индуцируется класс, проективно эквивалентный $\mathcal{L}_2$.

X_2 — некоторая 3-мерная подгеометрия, которая содержит π_2 и в которой индуцируется класс, проективно эквивалентный $\mathcal{L}_1$.

Y_2 — некоторая 3-мерная подгеометрия, которая содержит π_2 и в которой индуцируется класс, проективно эквивалентный $\mathcal{L}_2$.

$N = \frac{q^{n-2}-1}{q-1} = n_1 + m_1 = n_2 + m_2$, $q = 5$, — число 3-мерных подгеометрий геометрии $\mathrm{PG}(n, 5)$, содержащих некоторую плоскость.

Тогда

$$|\mathsf{star}(P) \cap \mathcal{L}| = |\mathsf{pen}(P, \pi_1) \cap \mathcal{L}| + n_1 \cdot |(\mathsf{pen}(P, X_1) \setminus \mathsf{line}(\pi_1)) \cap \mathcal{L}| + m_1 \cdot |(\mathsf{pen}(P, Y_1) \setminus \mathsf{line}(\pi_1)) \cap \mathcal{L}|$$

$$|\mathsf{star}(P) \cap \mathcal{L}| = |\mathsf{pen}(P, \pi_2) \cap \mathcal{L}| + n_2 \cdot |(\mathsf{pen}(P, X_2) \setminus \mathsf{line}(\pi_2)) \cap \mathcal{L}| + m_2 \cdot |(\mathsf{pen}(P, Y_2) \setminus \mathsf{line}(\pi_2)) \cap \mathcal{L}|$$

Подставим значения из шаблонов и приравняем:

$$6n_1 + 7m_1 = 3 + 3n_2 + 4m_2 \quad \Rightarrow \quad 6N + m_1 = 3 + 3N + m_2 \quad \Rightarrow \quad N = 1 + \frac{m_2 - m_1}{3},$$

что возможно только при $N = 1$, $m_1 = m_2 \in \{0, 1\}$, противоречие. $\square$

Из Леммы 10, Леммы 11 и Следствия 2 следует доказательство Теоремы 1.

5. Приложение

Т а б л и ц а 1

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
$\begin{array}{c}(1)\\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&5\\0&0&0&0&0&5\\0&0&0&0&0&5\\0&0&0&0&0&5\\0&0&0&0&0&5\\0&0&0&0&0&5\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}(1)\\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}\end{array}$

Т а б л и ц а 2

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
$\begin{array}{c}(1)\\ \begin{pmatrix}4&5&5&5&5&5\\4&5&5&5&5&5\\4&5&5&5&5&5\\4&5&5&5&5&5\\4&5&5&5&5&5\\4&5&5&5&5&5\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}(1)\\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\5&5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5&5\end{pmatrix}\end{array}$

Таблица 3

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\\5&5&5&5&5&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&5\\0&0&0&0&1&5\\0&0&0&0&1&5\\0&0&0&0&1&5\\0&0&0&0&1&5\\0&0&0&0&1&5\end{pmatrix}$	(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\1&1&1&1&1&2\end{pmatrix}$

Таблица 4

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
(1) $\begin{pmatrix}3&4&4&4&4&4\\4&5&5&5&5&5\\4&5&5&5&5&5\\4&5&5&5&5&5\\4&5&5&5&5&5\\4&5&5&5&5&5\end{pmatrix}$	(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\4&4&4&4&4&4\\5&5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&4&5&5&5&5\\0&4&5&5&5&5\\0&4&5&5&5&5\\0&4&5&5&5&5\\0&4&5&5&5&5\\0&4&5&5&5&5\end{pmatrix}$

Таблица 5

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&2&2&2\\0&0&0&2&2&2\\1&1&1&3&3&3\\2&2&2&4&4&4\\2&2&2&4&4&4\\3&3&3&5&5&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&2&2\\0&0&1&1&2&2\\1&1&2&2&3&3\\1&1&2&2&3&3\\3&3&4&4&5&5\\3&3&4&4&5&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}0&0&3&3&3&3\\0&0&3&3&3&3\\0&0&3&3&3&3\\0&0&3&3&3&3\\1&1&4&4&4&4\\1&1&4&4&4&4\end{pmatrix}$	(1) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&2&3\\0&0&1&1&2&3\\0&0&1&1&2&3\\1&1&2&2&3&4\\1&1&2&2&3&4\\1&1&2&2&3&4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&3\\0&1&1&1&1&3\\0&1&1&1&1&3\\0&1&1&1&1&3\\1&2&2&2&2&4\\2&3&3&3&3&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&2\\1&1&1&1&1&2\\1&1&1&1&1&2\\1&1&1&1&1&2\\1&1&1&1&1&2\\4&4&4&4&4&5\end{pmatrix}$

Таблица 6

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
(1) $\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1\\3&4&4&4&4&4\\3&4&4&4&4&4\\3&4&4&4&4&4\\3&4&4&4&4&4\\3&4&4&4&4&4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&2&2&2&2&3\\1&3&3&3&3&4\\2&4&4&4&4&5\\2&4&4&4&4&5\\2&4&4&4&4&5\\2&4&4&4&4&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&2&3&3&4&4\\1&2&3&3&4&4\\1&2&3&3&4&4\\2&3&4&4&5&5\\2&3&4&4&5&5\\2&3&4&4&5&5\end{pmatrix}$	(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&2&2&2\\1&1&1&3&3&3\\1&1&1&3&3&3\\2&2&2&4&4&4\\3&3&3&5&5&5\\3&3&3&5&5&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&2&2\\0&0&1&1&2&2\\2&2&3&3&4&4\\2&2&3&3&4&4\\3&3&4&4&5&5\\3&3&4&4&5&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&1&1&1&4&4\\1&1&1&1&4&4\\2&2&2&2&5&5\\2&2&2&2&5&5\\2&2&2&2&5&5\\2&2&2&2&5&5\end{pmatrix}$

Таблица 7

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&1&2&2\\1&1&1&2&3&3\\2&2&2&3&4&4\\2&2&2&3&4&4\\3&3&3&4&5&5\\3&3&3&4&5&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&2\\1&1&2&2&2&3\\1&1&2&2&2&3\\3&3&4&4&4&5\\3&3&4&4&4&5\\3&3&4&4&4&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}0&1&1&3&3&3\\0&1&1&3&3&3\\1&2&2&4&4&4\\1&2&2&4&4&4\\1&2&2&4&4&4\\2&3&3&5&5&5\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}0&1&2&2&3&3\\0&1&2&2&3&3\\0&1&2&2&3&3\\1&2&3&3&4&4\\2&3&4&4&5&5\\2&3&4&4&5&5\end{pmatrix}$	(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2&2\\2&2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4&4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&0&0&1&2&3\\1&1&1&2&3&4\\1&1&1&2&3&4\\1&1&1&2&3&4\\1&1&1&2&3&4\\2&2&2&3&4&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&3\\0&0&1&1&1&3\\1&1&2&2&2&4\\1&1&2&2&2&4\\2&2&3&3&3&5\\2&2&3&3&3&5\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&2&2\\0&0&1&1&2&2\\1&1&2&2&3&3\\1&1&2&2&3&3\\1&1&2&2&3&3\\3&3&4&4&5&5\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&2\\0&1&1&1&1&2\\0&1&1&1&1&2\\1&2&2&2&2&3\\2&3&3&3&3&4\\3&4&4&4&4&5\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}0&1&2&2&3&4\\0&1&2&2&3&4\\0&1&2&2&3&4\\0&1&2&2&3&4\\0&1&2&2&3&4\\0&1&2&2&3&4\end{pmatrix}$

Таблица 8

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
(1) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&2&2\\2&2&3&3&4&4\\2&2&3&3&4&4\\2&2&3&3&4&4\\3&3&4&4&5&5\\3&3&4&4&5&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&2\\1&2&2&2&2&3\\2&3&3&3&3&4\\3&4&4&4&4&5\\3&4&4&4&4&5\\3&4&4&4&4&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}0&1&2&3&3&3\\1&2&3&4&4&4\\1&2&3&4&4&4\\1&2&3&4&4&4\\1&2&3&4&4&4\\2&3&4&5&5&5\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}0&2&2&2&3&3\\0&2&2&2&3&3\\1&3&3&3&4&4\\1&3&3&3&4&4\\2&4&4&4&5&5\\2&4&4&4&5&5\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3&3\\3&3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4&4\\5&5&5&5&5&5\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}1&2&3&3&4&5\\1&2&3&3&4&5\\1&2&3&3&4&5\\1&2&3&3&4&5\\1&2&3&3&4&5\\1&2&3&3&4&5\end{pmatrix}$	(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&2&2&3\\1&1&1&3&3&4\\1&1&1&3&3&4\\1&1&1&3&3&4\\2&2&2&4&4&5\\2&2&2&4&4&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&2&3\\0&0&1&1&2&3\\1&1&2&2&3&4\\2&2&3&3&4&5\\2&2&3&3&4&5\\2&2&3&3&4&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}0&0&1&2&2&2\\0&0&1&2&2&2\\1&1&2&3&3&3\\1&1&2&3&3&3\\2&2&3&4&4&4\\3&3&4&5&5&5\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}0&1&1&1&2&2\\0&1&1&1&2&2\\0&1&1&1&2&2\\2&3&3&3&4&4\\2&3&3&3&4&4\\3&4&4&4&5&5\end{pmatrix}$

Таблица 9

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&1&2&2\\2&2&2&3&4&4\\2&2&2&3&4&4\\2&2&2&3&4&4\\3&3&3&4&5&5\\3&3&3&4&5&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&2\\1&1&2&2&2&3\\2&2&3&3&3&4\\3&3&4&4&4&5\\3&3&4&4&4&5\\3&3&4&4&4&5\end{pmatrix}$	(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3&3\\3&3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4&4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&0&0&1&2&3\\1&1&1&2&3&4\\1&1&1&2&3&4\\1&1&1&2&3&4\\2&2&2&3&4&5\\2&2&2&3&4&5\end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix}0&1&1&3&3&3\\1&2&2&4&4&4\\1&2&2&4&4&4\\1&2&2&4&4&4\\1&2&2&4&4&4\\2&3&3&5&5&5\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}0&1&2&2&3&3\\0&1&2&2&3&3\\1&2&3&3&4&4\\1&2&3&3&4&4\\2&3&4&4&5&5\\2&3&4&4&5&5\end{pmatrix}$	(3) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&3\\0&0&1&1&1&3\\1&1&2&2&2&4\\2&2&3&3&3&5\\2&2&3&3&3&5\\2&2&3&3&3&5\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&2&2\\0&0&1&1&2&2\\1&1&2&2&3&3\\1&1&2&2&3&3\\2&2&3&3&4&4\\3&3&4&4&5&5\end{pmatrix}$
(5) $\begin{pmatrix}1&2&2&3&4&5\\1&2&2&3&4&5\\1&2&2&3&4&5\\1&2&2&3&4&5\\1&2&2&3&4&5\\1&2&2&3&4&5\end{pmatrix}$	(5) $\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&2\\0&1&1&1&1&2\\0&1&1&1&1&2\\2&3&3&3&3&4\\2&3&3&3&3&4\\3&4&4&4&4&5\end{pmatrix}$

Т а б л и ц а 10

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&2\\3&3&3&3&3&5\\3&3&3&3&3&5\\3&3&3&3&3&5\\3&3&3&3&3&5\\3&3&3&3&3&5\end{pmatrix}$	(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&3\\2&2&2&2&2&5\\2&2&2&2&2&5\\2&2&2&2&2&5\\2&2&2&2&2&5\\2&2&2&2&2&5\end{pmatrix}$
(2) $\begin{pmatrix}0&1&1&2&2&2\\1&2&2&3&3&3\\1&2&2&3&3&3\\1&2&2&3&3&3\\3&4&4&5&5&5\\3&4&4&5&5&5\end{pmatrix}$	(2) $\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&1\\1&1&1&2&2&2\\1&1&1&2&2&2\\2&2&2&3&3&3\\2&2&2&3&3&3\\4&4&4&5&5&5\end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix}0&2&2&3&3&4\\0&2&2&3&3&4\\0&2&2&3&3&4\\1&3&3&4&4&5\\1&3&3&4&4&5\\1&3&3&4&4&5\end{pmatrix}$	(3) $\begin{pmatrix}0&0&1&2&3&3\\0&0&1&2&3&3\\1&1&2&3&4&4\\1&1&2&3&4&4\\1&1&2&3&4&4\\1&1&2&3&4&4\end{pmatrix}$
(4) $\begin{pmatrix}0&2&3&3&3&3\\0&2&3&3&3&3\\0&2&3&3&3&3\\0&2&3&3&3&3\\1&3&4&4&4&4\\2&4&5&5&5&5\end{pmatrix}$	(4) $\begin{pmatrix}0&0&2&2&2&3\\0&0&2&2&2&3\\0&0&2&2&2&3\\1&1&3&3&3&4\\1&1&3&3&3&4\\2&2&4&4&4&5\end{pmatrix}$
(5) $\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\1&1&1&1&2&2\\2&2&2&2&3&3\\3&3&3&3&4&4\\4&4&4&4&5&5\\4&4&4&4&5&5\end{pmatrix}$	(5) $\begin{pmatrix}0&1&2&2&2&2\\0&1&2&2&2&2\\0&1&2&2&2&2\\0&1&2&2&2&2\\1&2&3&3&3&3\\3&4&5&5&5&5\end{pmatrix}$

Т а б л и ц а 11

шаблоны прямых из $\mathcal{L}$	шаблоны прямых из $\overline{\mathcal{L}}$
(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&2\\3&3&3&3&3&5\\3&3&3&3&3&5\\3&3&3&3&3&5\\3&3&3&3&3&5\\3&3&3&3&3&5\end{pmatrix}$	(1) $\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&3\\2&2&2&2&2&5\\2&2&2&2&2&5\\2&2&2&2&2&5\\2&2&2&2&2&5\\2&2&2&2&2&5\end{pmatrix}$
(2) $\begin{pmatrix}1&1&2&2&4&4\\1&1&2&2&4&4\\1&1&2&2&4&4\\2&2&3&3&5&5\\2&2&3&3&5&5\\2&2&3&3&5&5\end{pmatrix}$	(2) $\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\2&2&2&3&3&3\\2&2&2&3&3&3\\3&3&3&4&4&4\\3&3&3&4&4&4\end{pmatrix}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bamberg J., Penttila T.** Overgroups of cyclic Sylow subgroups of linear groups // Comm. Alg. 2008. Vol. 36. P. 2503–2543. doi:10.1080/00927870802070108.
2. **Bruen A.A., Drudge K.** The construction of Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(3,q)$ // Finite Fields Appl. 1999. Vol. 5(1). P. 35–45. doi:10.1006/ffta.1998.0239.
3. **De Beule J., Demeyer J., Metsch K., Rodgers M.** A new family of tight sets in $Q^{+}(5,q)$ // Des. Codes Cryptogr. 2016. Vol. 78. P. 655–678. doi:10.1007/s10623-014-0023-9.
4. **Cameron P.J., Liebler R. A.** Tactical decompositions and orbits of projective groups // Linear Algebra Appl. 1982. Vol. 46. P. 91–102. doi:10.1016/0024-3795(82)90029-5.
5. **Drudge K.** Extremal sets in projective and polar spaces.: Thesis (Ph.D.)–The University of Western Ontario (Canada). 1998. 111 pp. ISBN: 978-0612-31135-0.
6. **Drudge K.** On a conjecture of Cameron and Liebler // European J. Combin. 1999. Vol. 20(4). P. 263–269. doi:10.1006/eujc.1998.0265.
7. **Feng T., Momihara K., Xiang Q.** Cameron-Liebler line classes with parameter $x=(q^2-1)/2$ // J. Combin. Theory Ser. A. 2015. Vol. 133. P. 307–338. doi:10.1016/j.jcta.2015.02.004.
8. **Gavrilyuk A.L., Matkin I., Penttila T.** Derivation of Cameron-Liebler line classes // Des. Codes Cryptogr. 2018. Vol. 86(1). P.231–236. doi: 10.1007/s10623-017-0338-4.
9. **Gavrilyuk A.L., Metsch K.** A modular equality for Cameron-Liebler line classes // J. Combin. Theory Ser. A. 2014. Vol. 127. P.224–242. doi:10.1016/j.jcta.2014.06.004.
10. **Gavrilyuk A.L., Mogilnykh I.Yu.** Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(n,4)$ // Des. Codes Cryptogr. 2014. Vol. 73(3). P. 969–982. doi:10.1007/s10623-013-9838-z.
11. **Govaerts P., Penttila T.** Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(3,4)$ // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 2005 Vol. 12(5). P. 793–804.
12. **Penttila T.** Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(3,q)$ // Geom. Dedicata. 1991. Vol. 37(3). P. 245–252. doi:10.1007/BF00181401. doi:10.1007/s10623-011-9581-2.
13. **Rodgers M.** Cameron-Liebler line classes // Des. Codes Cryptogr. 2013. Vol. 68(1-3). P. 33–37. doi:10.1007/s10623-011-9581-2.

Маткин Илья Александрович
старший преподаватель
Челябинский государственный университет
e-mail: ilya.matkin@gmail.com

Поступила 16.02.2018

I. A. Matkin. Faculty of Mathematics, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk 454001, Russia,
e-mail: ilya.matkin@gmail.com